Mathématiques en technologies de l’information

Calcul matriciel

Rappels de la géométrie vectorielle

Dans la géométrie en 3D, nous avons vu qu'une droite pouvait être exprimée comme un système d'équations du premier degré du type

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 3\gamma + \delta = 0 \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma + \delta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

Représentation matricielle

Nous écrivons les variables dans un vecteur :

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

Nous pouvons alors créer un tableau des coefficients de éléments de $\vec{x}$ dans le système d'équations (en ignorant, pour le moment, la partie des égalités)

Représentation matricielle

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 3\gamma + \delta = 0 \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma + \delta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

1α	-1β	3γ	1δ
3α	1β	2γ	1δ
3α	1β	1γ	1δ

Et en enlevant les variables,
Pour ne garder que les coefficients

α	β	γ	δ
1	-1	3	1
3	1	2	1
3	1	1	1

Représentation matricielle

Nous définissions une matrice, notée M, comme le tableau ci-dessous :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notez que M a 3 lignes et 4 colonnes.

Ceci est écrit sous la forme $M_{3\times 4}$.

Produit matriciel

Nous noterons que le produit matriciel du système d'équations initial est donné par :

$$M \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

ATTENTION : nous devons ici écrire $\vec{x}$ sous forme de colonne !

Généralisation

Une matrice $M_{m \times n}$ est décrite comme suite

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix}$$

Cas particuliers

Une matrice $M_{n \times n}$ est dite une matrice carrée,

Une matrice $M_{1 \times n}$ n'est autre qu'un vecteur ligne,

Une matrice $M_{m \times 1}$ n'est autre qu'un vecteur colonne,

Une matrice $M_{1 \times 1}$ est un scalaire.

Notez que le nombre de lignes et de colonnes doit être $m, n \geq 1$!

Opérateurs sur les matrices

ATTENTION :

TOUS les opérateurs sur des matrices n'ont de sens que si les tailles des matrices sont **cohérentes** !!!!

Addition matricielle

L'addition de deux matrices se fait décrit comme suit :

$$R_{m\times n} = M_{m\times n} + N_{m\times n}$$

$$\Rightarrow r_{ij} = m_{ij} + n_{ij}, \forall i = 1, \ldots m, j = 1 \ldots n$$

<u>Condition :</u> les deux matrices additionnées ont la même dimension !!!

Somme directe

Nous définissons également la ***somme directe***, comme suit :

$$R_{(m+p)\times(n+q)} = M_{m\times n} \oplus N_{p\times q}$$

$$R = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & \dots & m_{mn} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n_{11} & \dots & n_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n_{p1} & \dots & n_{pq} \end{pmatrix}$$

Multiplication par un scalaire

On peut multiplier une matrice par un scalaire :

$$R_{m\times n} = \lambda \times M_{m\times n}$$

$$\Rightarrow r_{ij} = \lambda \times m_{ij}, \forall i = 1, \dots m, j = 1 \dots n$$

Produit matriciel

Le produit matriciel se définit comme suit :

$$R_{m\times p} = M_{m\times n} + N_{n\times p}$$

$$\Rightarrow r_{ij} = m_{i1} \times n_{1j} + m_{i2} \times n_{2j} + \cdots + m_{1n} \times m_{nj},$$
$$\forall i = 1, \dots m, j = 1 \dots p$$

<u>Condition :</u> les deux matrices additionnées ont la même dimension !!!

Pour le détails du produit matriciel, voir le fichier suivant sur le site du cours :

produit_matriciel.pdf

Les Applications Linéaires

Exemple de fonction linéaire

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

Les Applications Linéaires

Une application linéaire n'est pas forcément de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Les espaces de départ et d'arrivée peuvent être différents (p.ex. $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ ou encore $\mathbb{R}^n \rightarrow \{0\}$).
Toute application linéaire $f : A \rightarrow B$ vérifie les relations suivantes, pour $x, y \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

et

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

Les Applications Linéaires

Vérifions que l'application suivante est linéaire :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

En effet

$$f(x+y) = \frac{1}{2}(x+y) = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = f(x) + f(y)$$

Et

$$f(\lambda x) = \frac{1}{2}(\lambda x) = \lambda \frac{x}{2} = \lambda f(x).$$

Les Applications Linéaires

Les applications suivantes sont des applications linéaires de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- $f(x) = \frac{1}{2}x$
- $f(x) = \pi x$

Les exemples suivants sont des exemples de fonctions non-linéaires

- $f(x) = x + 2$
- $f(x) = 0$
- $f(x) = x^2 + 3$
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \log(x)$

Les Applications Linéaires

Il existe également des applications linéaires à multiples dimensions :

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \\ -\sqrt{2}x_2 \end{pmatrix}$$

Notes: les dimensions n et m ne sont pas nécessairement égales !

Propriétés

Pour toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

- $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
- $f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$

Les deux conditions ci-dessus sont suffisantes.

Exercice

Montrez que la fonction suivante est une application linéaire :

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \\ -\sqrt{2}x_2 \end{pmatrix}$$

Il suffit de vérifier les points ci-dessus.

Application Linéaire et produit matriciel

Toute application linéaire peut être décrite sous forme de produit d'un produit matrice-vecteur et l'ajout d'une matrice constante :

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \\ -\sqrt{2}x_2 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que l'application linéaire ci-dessus est obtenue par le produit matrice-vecteur suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \\ -\sqrt{2}x_2 \end{pmatrix}.$$

Application Linéaire et produit matriciel

Notez que l'on peut également décrire la même fonction avec un produit inverse :

$$(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$= \left(x_1 + 2x_2 \quad x_2 \quad -\sqrt{2}x_2\right).$$

Transposée

Dans l'exemple précédent, le premier résultat est un vecteur colonne alors que le second est un vecteur ligne.

On notera

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T = \vec{x}^T$$

De même on notera la transposée d'une matrice A par A^T, qui est définie par

$$a_{ij} = A_{ji}^T$$

NOTE: si $A_{m \times n}$ alors $A_{n \times m}^T$ (les dimensions sont inversées).

Exercice: transposez la matrice suivante

1	2	3
4	5	6

1	4
2	5
3	6

Application Linéaire et produit matriciel

Notez que l'on peut également décrire la même fonction avec un produit inverse :

Donc, si

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, alors on aura

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Application Linéaire et produit matriciel

En termes d'équations, nous aurons donc que :

$$A\vec{x} = \vec{y}.$$

Et, via la transposée, nous aurons que

$$\vec{x}^T A^T = \vec{y}^T.$$

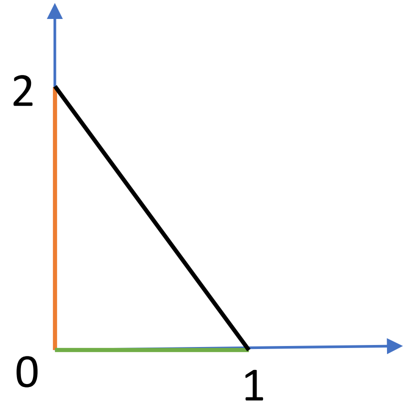
Exercice

Prouvez que pour une matrice $A_{3\times 2}$ quelconque, on a

$$A = (A^T)^T\ .$$

Exercice

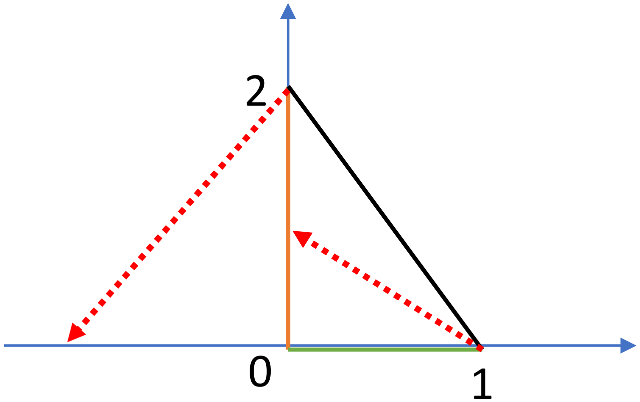
Appliquez la transformation linéaire suivante pour tous les points sur du triangle suivant :



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Corrigé

Prenons les 3 points d'extrémités.
Clairement $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$

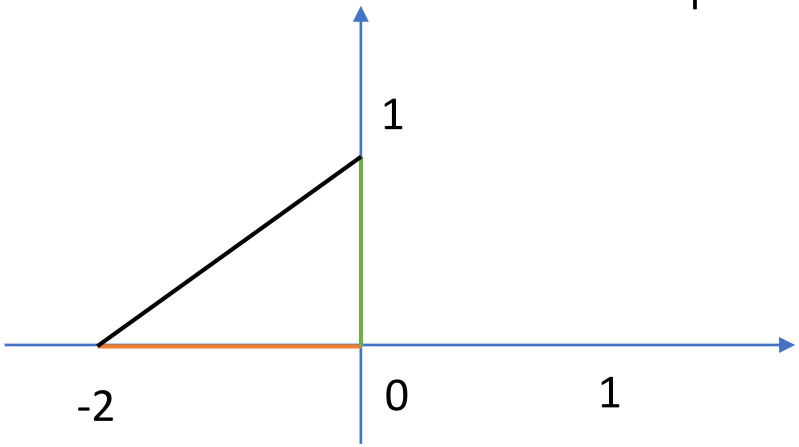


$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Corrigé

Le point $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est envoyé sur $\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

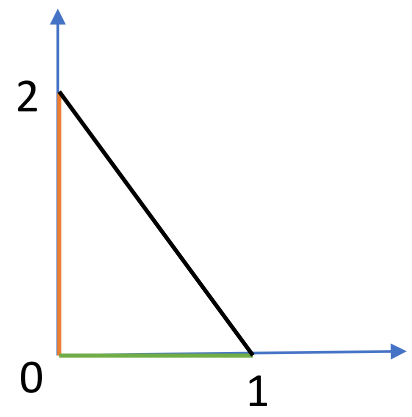
Il s'agit d'une rotation de 90° axée sur le point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Exercice

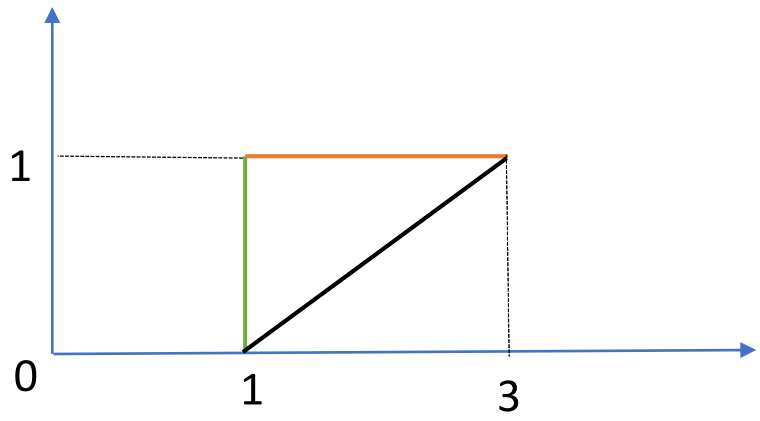
Donnez la transformation linéaire de effectuant une rotation de -90 ° sur le point $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Note : nous autorisons ici l'ajout d'un vecteur constant, du type $A\vec{x}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$.



Corrigé

Notez que $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$



Corrigé

Notre application linéaire est de la forme

$$A\vec{x} + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{y}$$

On peut en déduire les valeurs suivantes :

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + B = \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b_1 = 1 \\ b_2 = 1 \end{matrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} + 1 \\ a_{21} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{11} = 0 \\ a_{21} = -1 \end{matrix}$$

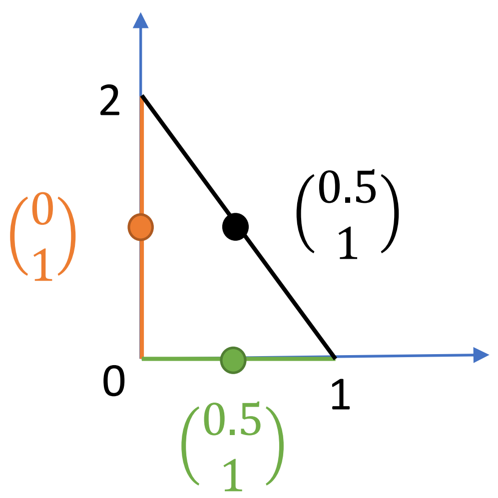
$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a_{12} + 1 \\ 2a_{22} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{12} = 1 \\ a_{22} = 0 \end{matrix}$$

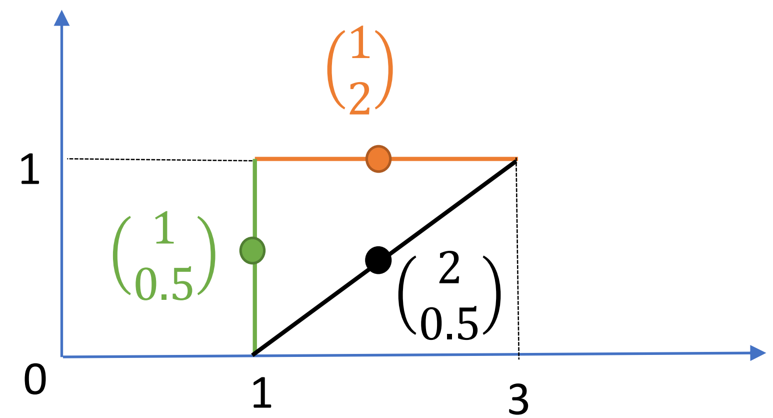
Corrigé

Notre application linéaire est donc définie par

$$A\vec{x} + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{y}$$

Vérifions pour les 3 points suivants :





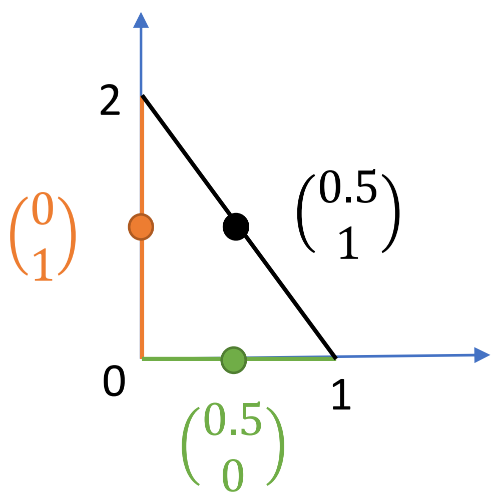
Corrigé

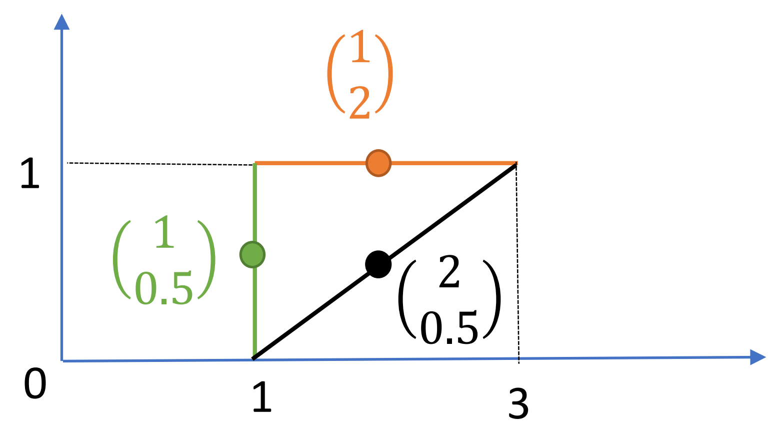
En effet :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$





Corrigé

Notre application linéaire est de la forme

$$A\vec{x} + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{y}$$

On peut en déduire les valeurs suivantes :

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + B = \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b_1 = 1 \\ b_2 = 1 \end{matrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} + 1 \\ a_{21} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{11} = 0 \\ a_{21} = -1 \end{matrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a_{12} + 1 \\ 2a_{22} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{12} = 1 \\ a_{22} = 0 \end{matrix}$$

Calculer la matrice selon une base

Nous désirons calculer les coefficients de la matrice A telle que :

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ -4x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Pour ce faire, notons la dimension: $A_{3\times 2}$. Ensuite, notons $\vec{e}_1 = (1,0)^T$ et $\vec{e}_2 = (0,1)^T$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, l'espace de départ.
Alors si on écrit A sous forme de 2 colonnes, on a que

$$A = (f(\vec{e}_1) \quad f(\vec{e}_2))$$

Calculer la matrice selon une base

Or

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et donc

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifions :

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 1x_2 \\ 0x_1 + 3x_2 \\ -4x_1 + 1x_2 \end{pmatrix}$$

Et si on avait une autre base ?

Supposons que nous avons une autre base B de $\mathbb{R}^2$, disons $\vec{b}_1 = (1,1)^T$ et $\vec{b}_2 = (1,-1)^T$.

Nous aimerions exprimer l'application linéaire sous forme $A_B(\vec{x})_B = (\vec{y})_c$.

Nous avons alors deux problèmes :

1. Comment convertir un vecteur $(\vec{x})_B$ vers la base $(\vec{x})_C$ et

2. Comment exprimer l'application précédente sous la forme $A_B(\vec{x})_B = (\vec{y})_c$?

1. Changement de base

1. Il s'agit en fait d'une application linéaire ! Nous pouvons donc utiliser le même procédé avec une matrice $M_{2\times 2}$ de sorte que

$$(\vec{x})_C = M_{2\times 2}(\vec{x})_B$$

Or en utilisant le même procédé qu'avant, nous avons que

$$M_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Notez que ceci est la matrice convertissant $(\vec{x})_B$ vers $(\vec{x})_C$.

En effet, $(\vec{b}_1)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C = (\vec{b}_1)_C$.

2. Application dans une autre base

Appliquons la même règle pour trouver la matrice utilisée pour les vecteurs en base B :

$$A_B = \begin{pmatrix} f(\vec{b}_1)^T \\ f(\vec{b}_2)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Souvenons nous que

$(\vec{b}_1)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C$ et $(\vec{b}_2)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_C$.

2. Application dans une autre base

Vérifions alors que :

$$A_B\left(\vec{b}_1\right)_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Or

$$A\left(\vec{b}_1\right)_C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Les deux résultats sont bien égaux (car tous deux exprimés dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. Application dans une autre base

Notons également que

$$A_B\left(\vec{b}_1\right)_B = AM_{2\times 2}\left(\vec{b}_1\right)_C$$

Nous pouvons donc en déduire que $A_B = AM_{2\times 2}$. En effet :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Exercices

Vérifiez que

$$A_B\left(\vec{b}_1\right)_B = AM_{2\times 2}\left(\vec{b}_1\right)_C$$

Avec les exemples précédents, mais d'autres points que $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{b}_1$ et $\vec{b}_2$.

Quelle est la matrice $M'_{2\times 2}$ telle que $(\vec{x})_C = M'_{2\times 2}(\vec{x})_B$?

Matrice identité

La ***matrice identié*** I est la matrice carrée avec des 0 partout, sauf sur la diagonale, où elle contient des 1 :

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 \ si \ i = j \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

Question : sachant que toute matrice correspond à une transformation linéaire, quelle est l'interprétation de géométrique de la matrice I ?

Matrice Inversible

Une matrice A est dite ***inversible*** s'il existe une matrice A^{-1} telle que

$$A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I.$$

Notes:

- Seules les matrices carrées peuvent être carrées…
- … mais pas toutes !! On les appelles les matrices ***singulières***.

La question légitime est – quand une matrice carrée est-elle inversible ?

Matrice Inversible

Une matrice A est inversible si :

- les vecteurs colonnes qui la composent sont linéairement indépendants,
- Si la transposée est inversible,
- Si les vecteurs lignes qui la composent sont linéairement indépendantes,
- Le système d'équations linéaire $A\vec{x} = \vec{0}$ n'a pour seule solution que $\vec{x} = \vec{0}$,
- Le déterminant de la matrice est non-nul.

Déterminant d'une matrice

Le déterminant d'une matrice $A_{2\times 2}$ est donné par

$$\det(A) = |A| = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}.$$

Pour le calcul d'une matrice $A_{3\times 3}$, le calcul est un peu plus compliqué. Nous utilisons pour cela les sous-matrices.

Déterminant d'une matrice $A_{3\times 3}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{13} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + \ a_{13}(a_{21}a_{13} - a_{31}a_{22})$$

Note : le «développement» en sous-déterminants peut se faire pour n'importe quelle ligne, mais aussi n'importe quelle colonne.

Exercices

Calculez les déterminants des matrices suivants :

- $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
- Choisissez une ligne ou une colonne autre que la première ligne d'une matrice $A_{3\times3}$, et vérifiez que le calcul donne le même résultat.

Applications de l'inversion

Considérons le système d'équations à n équations et n inconnues.

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Supposons que A, qui est carrée $n \times n$, est une matrice inversible.

Nous pouvons alors résoudre le système d'équations de la manière suivante, en multipliant des deux côtés (à gauche) par la matrice A^{-1}:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}(\vec{b})$$

Or $A^{-1}A = I$, la matrice identité de taille $n \times n$, donc

$$I\vec{x} = \vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Comment calculer l'inverse ?

Pour le calcul d'une matrice $A_{2\times 2}$ le calcul est le suivant :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Exercice

Résolvez le système d'équation suivant, en utilisant la formulation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Corrigé

Calculons l'inverse de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41}{11} \\ -\frac{-2}{11} \end{pmatrix}$$

Corrigé

Vérifions si c'est juste :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{41}{11} \\ -\frac{2}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \frac{41}{11} \\ -\frac{2}{11} \end{pmatrix}$ est donc bien la solution de notre système d'équations.

Autre application

Changement de base : nous avons vu qu'un changement d'une base minimale (autant de vecteurs linéairement indépendants que de dimensions) vers la base canonique s'obtenait via un produit matriciel $A_B(\vec{x})_B = (\vec{y})_c$.

Les colonnes de la matrice A_B correspondent aux vecteurs de la base B.

Or, ces colonnes sont linéairement indépendantes – nous avons vus que c'est une des conditions pour qu'une matrice soit inversible.

Il existe donc A_B^{-1} telle que

$$(\vec{x})_B = I(\vec{x})_B = A_b^{-1}A_B(\vec{x})_B = A_b^{-1}(\vec{y})_c$$

Autrement dit, la matrice A_B^{-1} est la matrice de changement de base de C vers B.

Exercice

Calculez les matrices de changement de base de $B \to C$ et $C \to B$ avec la base B de $\mathbb{R}^2$ formée par $\vec{b}_1 = (1,1)^T$ et $\vec{b}_2 = (1,-1)^T$.

Corrigé

$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice de conversion $B \to C$

$\det(A) = -2$ et donc la matrice est inversible (forcément, vu que les colonnes sont linéairement indépendantes).

La matrice inverse est donc la matrice de conversion $C \to B$:

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

ATTENTION aux signes !!!

Alternatives à l'inversion d'une matrice

- Pour une matrice carrée $A_{N\times N}$, le calcul du déterminant est coûteux,
- L'inversion de la matrice $A_{N\times N}$ l'est donc aussi !

Y a-t-il une autre méthode pour résoudre le système d'équiations $A\vec{x} = \vec{b}$?

Matrice diagonale supérieure

Supposons que nous avons une matrice diagonale supérieure du type

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors on a le système d'équations

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n = b_1 \\ u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ u_{n-1,n-1}\, x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ u_n x_n = b_n \end{cases}$$

Matrice diagonale supérieure

Nous pouvons alors résoudre les équations en partant de la dernière de façon itérative :

Alors on a le système d’équations

$$
\begin{cases}
x_n = \dfrac{b_n}{u_n} \\
x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - u_{n-1,n}\dfrac{b_n}{u_n}}{u_{n-1,n-1}} \\
\vdots
\end{cases}
$$

Donc notre système d’équations $U\vec{x} = \vec{b}$ se résout de manière itérative en partant de x_n.

Factorisation LU

Si dans le cas général $A_{N\times N}\vec{x} = \vec{b}$ est difficile à résoudre, c'est simple si on a une matrice diagonale supérieure.
Si nous pouvons décomposer $A_{N\times N}$ sous la forme d'une matrice diagonale supérieure, nous pourrons donc facilement résoudre le système d'équations :

$$A_{N\times N}\vec{x} = (L_{n\times n} \times U_{n\times n})\vec{x} = \vec{b}$$

Si $\vec{x}$ est une solution, alors

$$\vec{x} = L_{n\times n}\vec{y}$$

où $\vec{y}$ est la solution du système (facile à résoudre)

$$U_{n\times n}\vec{x} = \vec{b}.$$

Factorisation LU - propriétés

Soit $A_{N\times N}$ une matrice, alors

1. si $A_{N\times N}$ est inversible, on peut la factoriser sous la forme

$$A_{N\times N} = L_{n\times n} \times U_{n\times n}$$

   Où $L_{n\times n}$ est une matrice diagonale inférieure et $U_{n\times n}$ est une matrice diagonale supérieure.

2. La matrice $L_{n\times n}$ est de la forme

$$L_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Méthode du Pivot de Gauss

Soit $A_{N\times N}$ une matrice inversible, nous obtenons la factorisation LU via la factorisation de Gauss pour le système d'équations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Etape 1:</u> Augmenter la matrice avec une matrice identité à gauche :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

<u>Etape 2:</u> éliminer les coefficients de la diagonale inférieure en ajoutant des multiples d'une ligne à une autre pour obtenir des 0 dans les coefficients de la diagonale inférieure (a_{21}, a_{31}, a_{32}) et stocker les coefficients multiplicatifs avec le signe inverse dans la matrice identité.

Méthode du Pivot de Gauss

Elimination de a_{21} :
Ajoutons -1 fois la ligne 1 à la ligne deux dans la matrice augmentée :

$$\left(\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\left|\begin{matrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & -1\\ -3 & 2 & 2\end{matrix}\right.\right)$$

Elimination de a_{31} :
Ajoutons 3 fois la ligne 1 à la ligne 3 :

$$\left(\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{matrix}\left|\begin{matrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & -1\\ 0 & 5 & -1\end{matrix}\right.\right)$$

Elimination de a_{32} :
Ajoutons $5/3$ fois la ligne 2 à la ligne 3 :

$$\left(\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -3 & -\frac{5}{3} & 1\end{matrix}\left|\begin{matrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & -1\\ 0 & 0 & -\frac{8}{3}\end{matrix}\right.\right)$$

Méthode dz Pivot de Gauss

Une fois que la matrice à droite est diagonale supérieure, nous avons terminé et trouvé une factorisation LU de A, L étant la partie de gauche et U celle de droite dans la matrice finale $(L|U)$.

En effet, nous vérifions que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

Résolution du système d'équations

Ayant trouvé la factorisation LU de notre matrice A, nous commençons par résoudre le système d'équations $L\vec{y} = \vec{b}$ de façon itérative :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cela donne

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 - y_1 = 0 \\ y_3 = 1 + 3y_1 - \frac{5}{3} y_2 = 4 \end{cases}$$

Résolution du système d'équations

Il nous reste désormais à trouver le vecteur $\vec{x}$ qui est solution de l'équation $U\vec{x} = \vec{y}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Cela donne

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 + x_1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \\ x_2 = -\frac{1}{3}(0 + x_3) = \frac{1}{2} \\ x_3 = 4\left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Résolution du système d'équations

La solution du système d'équations est donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

En effet, nous vérifions que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \\ -1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice

Donnez la factorisation LU de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Corrigé

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow l_2 - 1 \times l_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow l_3 - 2 \times l_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{-2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow l_3 - 1 \times l_2$$

Corrigé

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{2} & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow l_4 - 2 \times l_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{-3} & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow l_4 - 3/2 \times l_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & \mathbf{1.5} & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{-2} & 1.5 \end{array}\right) \Rightarrow l_4 - 2 \times l_3$$

Corrigé

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1.5 & \mathbf{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & -2.5 \end{array}\right)$$

La factorisation $(L\ |U)$ est contenue dans la matrice augmentée ci-dessus.

Exercice

Résoudre le système d'équations suivant à l'aide de la factorisation LU

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$